Numerické metody minimalizace

Než vám klesnou víčka - Stříbrnice 2011

12.2. – 16.2.2011

Obsah

Úvod

1. neustálé optimalizování (obchod, volný čas..)
2. nakoupení mrkve, efektivnost

Základní pojmy

definice

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Množina X se nazývá konvexní, jestliže pro všechna x_1, $x_2 \in X$ a pro každé $\lambda \in [0,1]$ je $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$, tj. s libovolnými dvěma body $x_1, x_2 \in X$ leží v X celá úsečka spojující tyto dva body.

definice

Nechť $X \subset \mathbb{R}^n$ je konvexní množina, funkce $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ se nazývá

- konvexní na X, je-li pro všechna x_1, $x_2 \in X$ a každé $\lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

- ostře konvexní na X, platí-li ostrá nerovnost pro každé $\lambda \in (0,1)$ a $x_1 \neq x_2$.

Princip minimalizace

Nechť $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je konvexní množina a uvažujme na X konvexní funkci. Naší snahou je najít bod $x^* \in X$, v němž funkce f nabývá na X svého minima.

- neznalost explicitní funkce, její derivace
- nemožnost použít standartní minimalizační postup

Zvolíme počáteční bod $x_0 \neq x^*$. Jelikož se v bodě x^* nachází minimum funkce $f(x)$, musí platit

$$\Delta f(x_0) = f(x^*) - f(x_0) < 0$$

Princip minimalizace pokračování

Nyní se pokusíme z bodu x_0 posunout co nejblíže bodu x^*, přitom jeden krok tohoto posunu budeme definovat jako

$$\Delta x_k = x_{k-1} - x_k = \alpha_k s_k$$

kde α_k udává délku kroku a s_k jeho směr. Tento krok nás přiblížil k minimu, pokud bude splněno

$$\Delta f(x_k) = f(x_{k-1}) - f(x_k) < 0$$

Posloupnosti bodů splňujících tuto podmínku se říká minimalizující posloupnost.

Jednorozměrná minimalizace

- grafická interpretace
- málo praktických využití
- využití u vícerozměrné minimalizace
- aktivní vs. pasivní metody

Komparativní metody

definice

Řekneme, že funkce $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ je unimodální, jestliže existuje x^* náležící do intervalu $[a, b]$ takové, že f je klesající (rostoucí) na $[a, x^*)$ a rostoucí (klesající) na $(x^*, b]$.

Komparativní metody:

- neznáme funkci, ani její derivaci
- známe funkční hodnoty

Jaké si ukážeme komparativní metody

- Rovnoměrné dělení intervalu
- Fibonacciho metoda
- Metoda zlatého řezu

Rovnoměrné dělení intervalu

- pasivní metoda

Mějme na intervalu $[a, b]$ definovanou spojitou unimodální funkci $f(x)$ s minimem v bodě x^*. Naším úkolem je najít takový interval lokalizace minima, aby bod minima nebyl vzdálený od středu tohoto intervalu více než o zadaný koeficient přesnosti Δ.

- $x_0 = a$
- $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$
- rozdělení intervalu
- $s_k = 1 (s_k = -1)$
- délka jednoho kroku je $\alpha_k = \frac{b-a}{N+1}$
- počet bodů N?

Příklad

Na intervalu $[0, 15]$ najděte bod minima funkce $f(x)$ s požadovanou přesností $\lambda = 2$ pomocí metody rovnoměrného dělení intervalu. Víte, že $f(0) = 7$ a $f(15) = 7,84$, $f(x) = (2 - 0,28x)^2 + 3$.

Řešení

k	a	1	2	3	4	5	6	7	b
x_k	0	1,875	3,75	5,625	7,5	9,375	11,25	13,125	15
$f(x_k)$	7	5,175	3,902	3,180	3,01	3,390	4,322	5,805	7,84

Fibonacciho metoda

- aktivní metoda

Mějme na intervalu $[a, b]$ definovanou spojitou unimodální funkci $f(x)$ s minimem v bodě x^*.

- $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
- $F_n = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$
- $x_1 = \frac{F_{n-1}}{F_n}$
- po $(N - 1)$.kroku se musí určit x_N pomocí δ

Příklad

Na intervalu $[0, 1]$ najděte bod minima funkce $f(x)$ pomocí Fibonacciho metody, $f(x) = 7x^2 - 6x + 2$, $N = 5$, $\delta = 0,02$.

Metoda zlatého řezu

- aktivní metoda
- oproti Fibonacciho metodě má tu výhodu, že není vázaná na předem zvolené N
- ale při stejném počtu kroků je výsledný interval lokalizace minima delší než u Fibonacciho metody

Příklad

Na intervalu $[0, 1]$ najděte bod minima funkce $f(x)$ pomocí metody zlatého řezu, $f(x) = 5x^2 - 4x + 2$, $N = 5$.

Gradientní metody

- kromě funkční hodnoty potřebujeme i derivaci, požadujeme tedy diferencovatelnost funkce na intervalu $[a, b]$ a znalost jejích derivací.

- Metoda tečen

Vícerozměrná minimalizace

- metody komparativní
- metody gradientní
  - Metoda nejrychlejšího spádu
  - Metoda paralelních tečen
  - Metoda sdružených směrů
- metody newtonovské (hodnoty Hesseho matice)

Metoda nejrychlejšího spádu

- problém při více minimech
- $h_k = -f'(x_k)$
- $f(x_{k+1}) = \min_{\alpha} f(x_k + \alpha h_k)$

Příklad

Metodou nejrychlejšího spádu určete první iteraci x_1 při minimalizaci funkce $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$, je-li počáteční aproximace $x_0 = [1, 1]$.

Metoda paralelních tečen

- urychlení metody nejrychlejšího spádu
- $h_2 = x_2 - x_0$
- $h_3 \cdots$ jednorozměrné minimalizace
- $x_4 \cdots$ minimalizace ve směru h_3

Metoda sdružených směrů

- h_0, x_0 stejně jako u metody nejrychlejšího spádu
- $h_1 = -f'(x_1) + \beta_0 h_0$
- $\beta_0 = \frac{<f'(x_1), Ah_0>}{<Ah_0, h_0>}$

Příklad

Metodou sdružených směrů určete první iteraci x_1 a směr následující minimalizace h_1 při minimalizaci funkce $f(x) = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, je-li počáteční aproximace $x_0 = [0, 1]$.

Děkuji za pozornost:o)

odkaz na zdroj