Kvaterniony

17. februára 2012

Obsah

- snaha popísať podobným algebraickým spôsobom body priestoru $\mathbb{R}^3$ ako komplexné čísla popisujú body "roviny" $\mathbb{R}^2$
- sir W.R.Hamilton objavil algebraický popis daný vektorovým sčítaním 16.10.1843
- v porovnaní s komplexnými číslami sa musel vzdať komutativity a oproti očakávaniam boli potrebné 4 rozmery
- riešenie ho napadlo pri prechode Broombridge v Dubline, kde vyryl zakladnú formulku:

$$\boxed{i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1}$$

Násobenie prvkov báze kvaterniónov je dané nasledujúcou tabuľkou:

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Súčet je definovaný „po zložkách“. Kvaternión
$q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k \in \mathbb{H}$, kde $\forall i \in \{1, \dots, 4\}\ q_i \in \mathbb{R}$.
Zjednodušene: $q = \underbrace{q_1}_{Re(q)} + \underbrace{u}_{Im(q)}$, kde $u = q_2 i + q_3 j + q_4 k$ je chápaný ako vektor $\mathbb{R}^3$. Združený kvaternión ku q je
$\overline{q} = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k$.

Príklad

Ukážte, že platí:

$$\overline{p \cdot q} = \overline{q} \cdot \overline{p}.$$

Skalárny súčin dvoch kvaterniónov p, q definujeme

$$\langle p, q\rangle = \sum_{i=1}^{4} p_i q_i$$

Pripomeňme, že pre veľkosť vektoru u platí $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ Pre vektorový súčin dvoch vektorov u, v platí:

$$u \times v = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ i & j & k \end{vmatrix}$$

Pre $z \in \mathbb{C}$ vieme, že platí $\|z\|^2 = z\overline{z}$.
Platí niečo podobné pre kvaternióny?

$$q \cdot \overline{q} = (q_1 + u)(q_1 - u) = q_1^2 - uu = q_1^2 + \langle u, u\rangle = q_1^2 + \|u\|^2 = \|q\|^2 \tag{1}$$

Z uvedeného vzťahu vyplýva, že pre $q \neq 0$ existuje q^{-1} rovné

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$$

Násobenie komplexným číslom je rotácia zložená s rovnolahlosťou podľa stredu, čo znamená násobenie kvaterniónom?

$$\|p \cdot q\|^2 = pq\overline{pq} = pq\overline{q}\,\overline{p} = \|p\|^2\|q\|^2$$

Z tohto tvrdenia vyplýva že, keď zvolíme ľubovolné dva jednotkové kvaternióny, potom aj ich súčin leží na trojrozmernej sfére o polomere 1. Tým pádom množinou všetkých jednotkových kvaterniónov je

$$S^{(3)} = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\| = 1\} = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\} \tag{2}$$

.Teda na $\mathbb{R}^4$ existuje násobenie (asociatívne, nekomutatívne),kde pre každé nenulový prvok existuje inverzia. Podľa dôkazu Georga

Frobenia (1878) podobné tvrdenie platí už len pre $\mathbb{R}, C$. Ak sa zaobídeme bez asociativity, môžeme uvažovať o tzv. *Cayleyho číslach* alebo októniónoch $\mathbb{O}$ objavených hneď po Hamiltonovom objave nezávisle na sebe Johnom Gravesenom a Arthurom Cayleym.

$$q \cdot p = (q_1 + u)(p_1 + v) = q_1 p_1 + q_1 v + u p_1 + uv = (p_1 q_1 - \langle u, v \rangle) + (q_1 v + u p_1 +$$

$$uv = (q_2 i + q_3 j + q_4 k)(p_2 i + p_3 j + p_4 k) = -\underbrace{(q_2 p_2 + q_3 p_3 + q_4 p_4)}_{\langle u, v \rangle} +$$

$$+ \underbrace{((q_2 p_3 - q_3 p_2) k + (q_4 p_2 - q_2 p_4) j + (q_3 p_4 - q_4 p_3) i)}_{u \times v}$$

Nech $u = q_2 i + q_3 j + q_4 k$ a $\|u\| = 1$, potom podľa (2) dostávame

$$u \cdot u = -\langle u, u \rangle + u \times u = -\|u\|^2 = -1$$

„Hneď si môžeme všimnúť, že u má rovnakú vlastnosť ako i v $\mathbb{C}$“. Preto pre goniometrický tvar kvaterniónu dostávame:

$$q = \|q\|(\cos \varphi + u \sin \varphi), \qquad (3)$$

kde $\varphi \in \mathbb{R}$. Preveďme diskusiu vzhľadom hodnotám q.

- $q = 0$, potom φ a u ľubovolné.
- $q = q_1 \in \mathbb{R}$ $q_1 = \begin{cases} \varphi = 0, & u \text{ ľubovolné} \quad q > 0 \\ \varphi = \pi, & u \text{ ľubovolné} \quad q < 0 \end{cases}$
- $q \in \mathbb{H}$, $\|v\| \neq 0$

$$q = q_1 + v = \|q\| \left(\frac{q_1}{\|q\|} + \frac{v}{\|v\|} \frac{\|v\|}{\|q\|} \right)$$

Potom určite $\frac{q_1}{\|q\|} = \cos\varphi$, ale $\begin{cases} u = \frac{v}{\|v\|} & \sin\varphi = \frac{\|v\|}{\|q\|} \\ u = -\frac{v}{\|v\|} & \sin\varphi = -\frac{\|v\|}{\|q\|} \end{cases}$ Preto BUNO zvolime $\varphi \in [0, \pi]$. Keďže vektor $u \in S^{(2)} = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}$, potom ho vieme vyjadriť vo sférickych súradniciach, ale početne výhodnejšie je využiť *zovšeobecnený Eulerov vzťah* tj.

$$\mathrm{e}^{u\varphi} = \cos\varphi + u \sin\varphi.$$

Pre $n \in \mathbb{R}$ máme:

$$(\mathrm{e}^{u\varphi})^n = (\cos\varphi + u\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + u\sin n\varphi = \mathrm{e}^{nu\varphi}$$

Literatúra: Zlatoš. P: Cesta z troch rozmerov s presahmi do príbuzných oborov, Bratislava,2011.