Geometrie

Hmotné body a k čemu slouží

Zbyněk Konečný

Zimnění 2011

12.–16.2.2011

O čem to dnes bude?

1. Hmotné body
2. Cevova věta a barycentrické souřadnice
3. Trilineární souřadnice
4. Van Aubelova věta
5. Steinerova věta
6. Stewartův vzorec

Hmotné body

- Bodu v rovině přiřadíme hmotnost
- těžiště bodů (A, m_a), (B, m_b) leží na úsečce AB a dělí ji v poměru $m_b : m_a$. Těžišti přiřadíme hmotnost $m_a + m_b$
- lze takto těžiště konstruovat i pro více než 2 body
- vždy spojnice těžišť množin bodů A, B prochází těžišti množiny $A \cup B$

Cevova věta

Nechť ABC je trojúhelník a X, Y, Z po řadě body na a, b, c. Přímky AX, BY a CZ se protínají v jednom bodě právě když

$$\frac{|AZ||BX||CY|}{|BZ||CX||AY|} = 1$$

- pokud se přímky protnou, je jejich průsečík těžištěm pro vhodně zvolené váhy
- tyto váhy nám dají požadovanou rovnost
- ekvivalentnost je snadné dokázat
- spojnice průsečíku s vrcholem se nazývá Ceviána
- váhy

Příklady

Dokažte, že se v trojúhelníku protnají

- těžnice
- výšky
- osy úhlů
- spojnice vrcholů s dotykovými body vepsané kružnice
- spojnice vrcholů s dotykovými body připsaných kružnic

a určete barycentrické souřadnice průsečíků

Trilineární souřadnice

- trojpoměr vzdáleností bodu v trojúhelníku od jeho stran nazýváme trilineárními souřadnicemi bodu
- pokud Ceviány nějakého bodu zobrazíme podle os úhlů, opět se protnou v jednom bodě
- tento bod nazýváme isogonálně sdružený

Příklady

- Najděte vztah mezi trilineárními a barycentrickými souřadnicemi bodu.
- Určete trilineární souřadnice isogonálně sdruženého bodu
- najděte trilineární souřadnice průsečíku symedián a středu Feuerbachovy kružnice
- dokažte, že spojnice vrcholů a podobných rovnoramenných trojúhelníků nad stranami se protínají v jednom bodě
- Určete trilineární souřadnice Brocardova bodu (jeho ceviány svírají se pravotočivě sousedními stranami stejný úhel).

Van Aubelova věta

Věta (VanAubel)

Nechť P je vnitřní bod $\triangle ABC$. Přímky AP, BP, CP protínají strany trojúhelníka v bodech X, Y a Z. Pak
$|AP| : |PX| = |AY| : |CY| + |AZ| : |CZ|$

Steinerova věta

Věta (Steiner)

Nechť T je těžiště množiny bodů $\{(A_1, m_1), (A_2, m_2), \ldots, (A_n, m_n)\}$. Pak pro libovolný bod X platí $\sum m_i|XA_i|^2 = |XT|^2 + \sum m_i|TA_i|^2$

Stewartův vzorec

Nechť bod X dělí stranu AB trojúhelníka ABC v poměru $m : n$, kde $m + n = 1$. Pak $a^2 m + b^2 n = x^2 + c^2 mn$. Odtud snadno určíme

- délku těžnice
- délku osy úhlu