Burnsideovo lemma

30. srpna 2008

Obsah

Motivační příklady

- Kolika způsoby lze obarvit krychli pěti barvami?
- Kolik existuje různých jader dichlorbenzenu?
- Kolik je typů řešitelných pozic rubikovy kostky?

Obecný problém

- Mějme množinu X nějakých objektů.
- Určeme množinu G operací takových, že pokud prvek x' vznikne z prvku x některou z těchto operací, považujeme za *stejné*.
- Chceme určit, kolik *nestejných* prvků množina X obsahuje, tj. z kolika tříd se skládá X/G.

Definice

- *Orbitou Gx objektu x vzhledem ke grupě operací G nazveme množinu všech prvků, na x', které se x nějakou operací z G zobrazí.*
- Pevným bodem operace g rozumíme objekt x pro který $g(x) = x$. Množinu pevných bodů g značíme X^g.
- *Grupu symetrií objektu x, která je podgrupou G budeme značit G_x.*

Lemma

Počet tříd X/G je roven průměrnému počtu pevných bodů všech zobrazení $q \in G$:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

Důkaz

Na prvek x pošleme všech $|G|$ zobrazení, dostaneme $|O_x|$ objektů, každý $|G_x|$ krát. Proto

$$|G| = |0_x| \cdot |G_x| = \sum_{x_i \in O_x} |G_x|.$$

Určeme počet dvojic $g \in G, x \in X$ pro které $g(x) = x$.

1. Sčítáním přes G: $\sum_{g \in G} |X^g|$
2. Sčítáním přes X: $\sum_{x \in X} |G_x|$
3. Sčítáním přes X/G:
   $\sum_{O \in X/G} \sum_{x \in O} |G_x| = \sum_{O \in X/G} |G| = |X/G| \cdot |G|$

Porovnáním 1. a 3. dostáváme zadané tvrzení.

Příklad první

Kolika způsoy lze obarvit šachovnici 5x5 dvěma barvami?

příklad druhý

Kolika způsoby lze obarvit krychli n barvami?

Příklad třetí

Kolika způsoby lze obarvit dvanáctistěn n barvami?

Malá Fermatova věta

Určete počet různých náhrdelníků složených z p drahokamů, pokud máme n druhů drahokamů, ty lze po řetízku posouvat ale otočení řetízku vzhůru nohama je zjistitelné.

Wilsonova věta

Určete počet uzavřeých lomených čar, které mají své zlomy ve vrcholech pravidelného p-úhelníka. Čáry považujeme za shodné, lze-li jednu získat otočením druhé.

Rovnice typu $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = n$

Nalezněte všechna řešení rovnice

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = n$$

kde a_i je neklesající posloupnost.
Větší výzva:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_m = n$$

Chemie

Kolika existuje izomerů dichlorbenzenu? Kolik dichlorcyklohexenu?